MAT 307 groupe PM-5 **Contrôle continu** **27 novembre 2017**

Le barème est sur 23 points, les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. *Courbe paramétrée (10 points)* On étudie la courbe paramétrée $M(t) = (\cos t, \sin^3 t)$.

1. *(1 point)* Quel est le domaine de définition de la courbe ?

   Les fonctions $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin^3 t$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc la courbe paramétrée est définie sur $\mathbb{R}$.

2. *(2 points)* En précisant la périodicité de la courbe et ses symétries, montrer qu'on peut restreindre l'étude de la courbe à $I = [0, \pi/2]$. On restreint dans les questions 3 à 6 l'étude à l'intervalle I.

   Les fonctions x et y sont 2π-périodiques donc on peut restreindre l'étude de la courbe à l'intervalle $[-\pi, \pi]$. De plus, x est paire et y est impaire donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses et on peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$. Aussi, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ donc $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées et on peut restreindre l'étude à $[0, \pi/2]$.

3. *(1 point)* Etudier les variations de l'abscisse et de l'ordonnée de M.

   La fonction x décroît de $x(0) = 1$ à $x(\pi/2) = 0$. La fonction y croît de $y(0) = 0$ à $y(\pi/2) = 1$.

4. *(1 point)* Quel(s) est (sont) le(s) point(s) singulier(s) ?

   On fixe $t \in [0, \pi/2]$. Alors $M(t)$ est un point singulier ssi $(x'(t) = y'(t) = 0)$. Donc $M(0)$ est l'unique point singulier.

5. *(2 points)* Donner l'équation de la tangente aux points singuliers.

   On a $x''(t) = -\cos t$ et $y''(t) = (3\cos t \sin^2 t)' = -3\sin^3 t + 6\cos^2 t \sin t$. Alors $M''(0) = (-1, 0)$. La tangente à la courbe en $t = 0$ est horizontale, son équation est $y = 0$.

6. *(2 points)* Donner en justifiant la position de la courbe par rapport à la tangente aux points singuliers. On a $x'''(t) = \sin t$ et $y'''(t) = -9\cos t \sin^2 t - 12\sin^2 t \cos t + 6\cos^3 t$. Alors $M'''(0) = (0, 6)$ n'est pas colinéaire à $M''(0)$ donc $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

7. *(1 point)* Tracer l'ensemble de la courbe (indication : vérifier la cohérence avec les résultats des questions précédentes).

Exercice 2. *Forme différentielle (5 points)*

1. *(0,5 point)* On fixe un paramètre réel λ. Donner le domaine de définition de la forme différentielle $\omega = \lambda y \mathrm{d}x + x \mathrm{d}y$.

   ω est définie sur $\mathbb{R}^2$.

2. *(1,5 point)* Selon les valeurs de λ, dire si ω est fermée.
   $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\lambda y) = \lambda$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$ donc ω est fermée ssi $\lambda = 1$.
3. *(1,5 point)* Si $\lambda = 1$, trouver une fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = \mathrm{d}V$.
   On suppose qu'une telle V existe. Alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V = y$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}V = x$. En intégrant la première équation par rapport à x : V(x,y) = xy +C(y). En injectant dans la seconde équation on a : x + C'(y) = x i.e. C'(y)=0. On vérifie réciproquement que $V(x, y) = xy$ convient.
4. *(1,5 point)* Si $\lambda = 1$, calculer l'intégrale de ω le long de l'arc paramétré $\gamma : t \in [0, \pi/2] \mapsto (\cos t, \sin t)$.
   $\int_\gamma \omega = V(\gamma(\pi/2)) - V(\gamma(0)) = 0$.

Exercice 3. *(3 points)* Donner une solution de $y'(t) + 2y(t) = t^2$.

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto Ce^{-2t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(t) = C(t)e^{-2t}$. Alors $C'(t)e^{-2t} = t^2$ donc $C(t) = \int^t u^2 e^{2u}\mathrm{d}u = [u^2\frac{e^{2u}}{2}]^t - \int^t ue^{2u}\mathrm{d}u = t^2\frac{e^{2t}}{2} - t\frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{4}$. Donc $t \mapsto \frac{t^2-t+1/2}{2}$ est solution particulière.

Exercice 4. *Circuit RLC (5 points), les questions* 1 *et* 2 *sont indépendantes.* On fixe des constantes $R, U \geq 0$ et $L, C > 0$. On considère l'équation différentielle (2) : $Lq''(t) + 2Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = U\sin(t/\sqrt{LC})$.

1. On suppose $U = 0$ et $R^2 > L/C$ dans cette question.
   (a) *(1,5 point)* Donner toutes les solutions réelles de l'équation (2).
   L'équation caractéristique est $Lr^2 + 2Rr + \frac{r}{C} = 0$. Ses racines sont $r = -R \pm \sqrt{R^2 - \frac{L}{C}}$. Donc l'ensemble des solutions réelles est
   $$\{t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{(-R+\sqrt{R^2-\frac{L}{C}})t/L} + Be^{(-R-\sqrt{R^2-\frac{L}{C}}t/L},\ A, B \in \mathbb{R}\}.$$
   (b) *(0,5 point)* Quel est le comportement des solutions quand $t \to +\infty$?
   Les solutions tendent vers 0 quand $t \to +\infty$.
2. On suppose $R = 0$ dans cette question.
   (a) *(2 points)*Trouver une solution particulière réelle q_p de l'équation (2) (on pourra penser à considérer l'équation différentielle $Lq''(t) + \frac{q(t)}{C} = U\exp(it/\sqrt{LC})$).
   $i/\sqrt{LC}$ est solution de l'équation caractéristique $Lr^2 + \frac{1}{C} = 0$ donc on cherche une solution q de $Lq''(t) + \frac{q(t)}{C} = U\exp(it/\sqrt{LC})$ sous la forme $q(t) = Cte^{it/\sqrt{LC}}$. Alors $Ce^{it/\sqrt{LC}}(2i/\sqrt{LC}) = Ue^{it/\sqrt{LC}}$ d'où $C = U\sqrt{LC}/2i$ et $q(t) = U\sqrt{LC}/2ie^{it/\sqrt{LC}}$ est solution particulière. De plus $\overline{q(t)}$ est solution de $Lq''(t) + \frac{q(t)}{C} = U\exp(-it/\sqrt{LC})$. Donc $q_p(t) = (q(t) - \overline{q(t)})/2 = U\sqrt{LC}\sin(t/\sqrt{LC})/2$ est solution particulière de (2).
   (b) *(1 points)* Donner l'ensemble de toutes les solutions réelles de (2).
   $$\{t \in \mathbb{R} \mapsto A\cos(t/\sqrt{LC}) + B\sin(t/\sqrt{LC}) + q_p(t),\ A, B \in \mathbb{R}\}.$$